Численные методы линейной алгебры

Метод обращения матрицы A для решения СЛАУ

Обратная матрица A^{-1} такова, что $A^{-1}A = E$,

$$Ax = f \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}f$$

где $E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица

$x = A^{-1}f$ $\quad (Ex = x)$, A^{-1} $\exists$ если $\det A \neq 0$ – это невырожденная матрица A.

Подробно рассмотрим позже. Используется нередко, однако не является наилучшим. Пример недостатка:

$$7x = 21,\ {\scriptstyle n=1} \Rightarrow \quad x = 21/7 = 3,$$

ввести отдельно

по идеологии A^{-1} получим: $\quad x = 7^{-1} * 21 = 0.142857 * 21 =$ 1429

Сам. Проверить $\quad = 2.99997$

Т.е. метод даёт заметные погрешности из-за лишних операций с веществ. числами (операции обращ

Аналитическое нахождение обратной матрицы:

$x = A^{-1}f$

Произведение $\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Для $m \leq 3$ можно делать «влоб»

$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$ Произведение матриц.

– на вектор: $c_j = \sum_i a_{ij} b_i$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left(A_{ij} \right)^T$$

транспонированная матрица алгебраических дополнений $\equiv$ $\equiv$ присоединённая матрица.

если $A = \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix}$ $\Rightarrow A_{11}$, $-A_{12}$

$$A_{ji} \equiv A_{ij}^T = \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} & -x & +x \\ -(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) & +x & -x \\ +x & -x & +x \end{pmatrix}$$

ij элемент матрицы дополнений = det, составленного вычеркиванием строки i и столбца j (с чередованием знака) исходной матрицы.

Но вычисление определителей приемлемо при малых m.

При большой размерности СЛАУ (m большое)

Поиск обратной матрицы можно осуществлять через решение ур-ния

$$A A^{-1} = E \text{ (единичная)}, \text{ т.е. } \boxed{AX = E},$$

где $X = (x_{ij})$ порядка m. Задачу определения матрицы X можно представить как m з-ч определения векторов $\vec{x}_j$ (столбцы X):

$$A \cdot \begin{pmatrix} x & \boxed{x} & x \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x & x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & \ddots\; 1 & \\ 0 & 0 & \ddots\; 1 \end{pmatrix} \Rightarrow m \text{ систем: } \boxed{A x_j = e_j} \quad j = 1, \dots, m$$

$\vec{x}_j$ $\qquad$ $\vec{e}_j$

Для определения x_j — метод Гаусса, заметим, что A для всех m систем одна и та же, т.е. m систем отличаются только правой частью: 0 или 1 в соотв. местах

Один прямой проход и m обратных

Количество вычислений сравнимо с методом Гаусса, т.е. имеет порядок примерно (чуть больше) $O(m^3)$.

При вычислении $x = A^{-1} f$ получаем дополнительные операции и, в итоге, можно считать, что решение СЛАУ методом обращения матрицы имеет порядок

$$O(m^4).$$